

ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΑΠΟΣΤΑΣΕΙΣ
ΠΑΝΩ ΣΕ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

Ορισμός: Μονοπάτι

- Μονοπάτι ε' ένα γραφήμα G θα λέγεται μια ακολουθία κορυφών
 $u_1 \xrightarrow{e_1} u_2 \xrightarrow{e_2} \dots \xrightarrow{e_{n-1}} u_n$
όπου η ακμή e_j ενώνει τις κορυφές u_j και u_{j+1} , $j=1, \dots, n-1$
- Το πλήθος των ακμών $(n-1)$ που εμφανίζεται ε' ένα μονοπάτι, θα λέγεται μήκος του μονοπατιού
- Ένα μονοπάτι μπορεί να χρησιμοποιήσει μία ακμή του γραφήματος παραπάνω από μία φορά. //

Ορισμός: Κύκλωμα

- Κύκλωμα λέγεται ένα μονοπάτι που η τελευταία κορυφή είναι ίδια με την πρώτη.
- Όταν θέλουμε να μιλήσουμε για κύκλωμα χωρίς επαναλαμβανόμενες ακμές θα το αποκαλούμε κύκλο. //

Ορισμός: Προσική Κορυφή

- Θα λέμε ότι η κορυφή u είναι προσική από την κορυφή v , αν \exists μονοπάτι που να ξεκινά από την u και να καταλήξει στην v . //

Ορισμός: Συνεκτικό Γράφημα

- Ένα γραφήμα θα λέγεται συνεκτικό αν έχει μόνο μία συνεκτική συνιστώσα, αν δηλαδή κάθε κορυφή ενώνεται με κάθε άλλη μέσω ενός μονοπατιού. //

Ορισμός: Απόσταση

- Ορίζουμε $d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ που θα έχει την έννοια της απόστασης.
- Η ποσότητα $d(u,v)$ θα μετράει το πόσο κοντά είναι οι δύο κορυφές u και v του γραφήματος.

- Αν η κορυφή u δεν είναι προσιτή από την κορυφή v τότε ορίζουμε $d(u,v) = d(v,u) = +\infty$.
- Αλλιώς ορίζουμε $d(u,v)$ να είναι το ελάχιστο μήκος μονοπατιού, που συνδέει τις u και v , δηλαδή το μονοπάτι με τις λιγότερες ακμές. $\boxed{\forall u,w,v \in V : d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)}$ → Τριγωνική Ανισότητα //

Ορισμός: Διαμέτρος

Ενός γραφήματος G ορίζεται να είναι η μέγιστη απόσταση ανάμεσα σε δύο κορυφές του G .

$$\boxed{\text{diam } G = \max_{u,v \in V} d(u,v)}$$

- Αν G συνεκτικό γραφήμα με n κορυφές μέγιστο βαθμό d τότε $n \leq 1 + d \frac{(d-1)^{\text{diam } G} - 1}{d-2}$ //

Ορισμός: Δένδρα και Δάιση

- Ένα συνεκτικό γραφήμα που δεν περιέχει κύκλους ονομάζεται δένδρο
- Ένα γραφήμα συνεκτικό ή μη, που δεν περιέχει κύκλους ονομάζεται δαίση.

Ένα δένδρο T υπογράφημα του G και με τις ίδιες κορυφές, λέγεται δένδρο που παράγει το G (spanning tree).

Αν το T δεν είναι δένδρο αλλά είναι δαίση και κάθε συνεκτική συνιστώσα του G παράγεται από κάποιο δένδρο T , τότε το T λέγεται δαίση που παράγει το G .

Θεώρημα: Κάθε δένδρο με n -κορυφές έχει ακριβώς $n-1$ ακμές.

Πρόταση: Αν ένα συνεκτικό γραφήμα G με n -κορυφές έχει $n-1$ ακμές τότε είναι δένδρο.

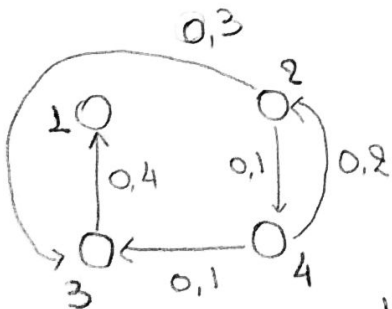
ΓΕΝΙΚΕΥΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ

Κατευθυνόμενα γραφήματα: είναι ζεύγη (V, E) όπου και πάλι V είναι σύνολο κορυφών αλλά το σύνολο E των ακμών είναι τώρα όχι ένα σύνολο διμερών υποσυνόλων του V αλλά ένα σύνολο διατεταχμένων ζευγών με στοιχεία από το V , δηλ $E \subseteq V \times V$.

Πολλαπλές ακμές: Γραφήματα με πολλαπλές ακμές είναι αυτά (κατευθυνόμενα ή μη) στα οποία μια ακμή μπορεί να μην υπάρχει καθόλου, να υπάρχει μια φορά, δυο φορές κ.τ.λ.
Ο αριθμός των φορές που εμφανίζεται η ακμή λέγεται πολλαπλότητα ακμής.

Αυτοαυδέες ή βρόχοι: είναι αυτά στα οποία επιτρέπουμε μια κορυφή να συνδέεται με τον εαυτό της.
Μια τέτοια ακμή ονομάζεται αυτοαυδέηση ή βρόχος.

Βάρος: στις ακμές είναι αυτά (κατευθυνόμενα ή μη) στα οποία κάθε ακμή έχει και ένα βάρος / κόστος. //



Απόσταση σε γραφήματα με βάρος είναι το άθροισμα των βαρών των ακμών που ευμετέχουν β' ένα μονοπάτι

Η απόσταση ανάμεσα στις u, v ορίζεται ως το ελάχιστο μονοπάτι που τις συνδέει.